Prezados concursandos!!!
Bom dia!!!

Meu nome é Profº Pio e gostaria de externar a todos a grande satisfação de poder estar tendo esta oportunidade, muito gentilmente proporcionada pela Direção do CURSO MAXX, de nesta reta final de preparação para a Prova do Ministério da Fazenda, apresentar-lhes alguns comentários de questões de técnicas de contagem (análise combinatória), probabilidade, lógica matemática e álgebra linear, cobradas em concursos passados pela ESAF.

Inicialmente, a estatística tem mostrado que nas provas de raciocínio lógico matemático para nível médio aplicadas pela ESAF nos últimos 5 anos, os assuntos prioritariamente mais cobrados são: Lógica Matemática (em torno de 50%), Probabilidade (em torno de 20%), Análise Combinatória (em torno de 10% ou 20%) e Álgebra Linear (em torno de 10% ou 20%).

Meus queridos, sem mais delongas, passemos aos comentários:

ANÁLISE COMBINATÓRIA

01) **(MPU – Técnico Adm. – ESAF – 2004)** Paulo possui três quadros de Gotuzo e três de Portinari e quer expô-los em uma mesma parede, lado a lado. Todos os seis quadros são assinados e datados. Para Paulo, os quadros podem ser dispostos em qualquer ordem, desde que os de Gotuzo apareçam ordenados entre si em ordem cronológica, da esquerda para a direita. O número de diferentes maneiras que os seis quadros podem ser expostos é igual a
a) 20. b) 30. c) 24. d) 120. e) 360.

Comentário:

Note que apenas os quadros de Portinari poderão apresentar uma reordenação qualquer (antes, por entre ou depois dos quadros de Gotuzo), tendo em vista que estes já devem estar ordenados em uma única possibilidade cronológica, isto é, uma vez escolhidos os 3 lugares para os quadros de Portinari os outros 3 de Gotuzo já terão uma ordem pré-determinada.

Sendo P1, P2, P3, G1, G2 e G3 os quadros de Portinari e Gotuzo respectivamente, onde os números 1, 2 e 3 indicam a cronologia, podemos ter algumas possibilidades:

P3 G1 P2 P1 G2 G3 **G1 P2 P1 G2 P3 G3** **P2 P1 G1 G2 G3 P3**
P1 P2 P3 G1 G2 G3 **P3 G1 P2 G2 P1 G3** **G1 G2 P3 P1 P2 G3**
G1 G2 G3 P3 P1 P2 **……**

Daí, basta concluirmos que o nº de possibilidades de dispormos os 6 quadros, com os 3 de Gotuzo em ordem cronológica, será igual ao nº de possibilidades de ordenarmos os 3 quadros de Portinari, isto é, para P1 teremos 6 possibilidades, para P2 teremos 5 possibilidades e para P3 teremos 4 possibilidades. **Pelo Princípio Multiplicativo**, nº total de possibilidades = 6 x 5 x 4 = 120.

Poderíamos também utilizar a **Técnica do Arranjo** já que a ordem será importante, ou seja, $A_{6;3} = \frac{6!}{(6-3)!} = \frac{6!}{3!} = \frac{6x5x4x3!}{3!} = 6x5x4 = 120$.

Portanto, meus amigos resposta é letra (D)

02) **(AFRE - ESAF)** Sete modelos, entre elas Ana, Beatriz, Carla e Denise, vão participar de um desfile de modas. A promotora do desfile determinou que as modelos não desfilarão sozinhas, mas sempre em filas formadas por exatamente quatro das modelos. Além disso, a última de cada fila só poderá ser ou Ana, ou Beatriz, ou Carla ou Denise. Finalmente, Denise não poderá ser a primeira da fila. Assim, o número de diferentes filas que podem ser formadas é igual a:

a) 420 b) 480 c) 360 d) 240 e) 60

Comentário:

Poderemos ter filas com 4 modelos de maneira que:

--------	---------	---------	----------
Ana Beatriz Carla Denise			**Denise(não)**

Note que somente nos preocuparemos em tirar Denise da 1ª posição da fila, quando tivermos certeza de que ela não está na última posição. Logo, dividiremos o problema em dois casos:

1ºCaso - nº de possibilidades em que Denise é a última da fila:

1	**x**	**6**	**x**	**5**	**x**	**4**	**= 120 possibilidades**
--------		-------		-------		--------	
Denise							

2º Caso - nº de possibilidades em que Denise não é a última da fila:

3	**x**	**5**	**x**	**4**	**x**	**5**	**= 300 possibilidade**
--------		---------		---------		----------	
Ana Beatriz Carla						**Denise (não)**	

Logo teremos um total de 120 + 300 = 420 possibilidades.

Portanto, meus amigos resposta é letra (A)

NOTE E ANOTE: Uma dúvida muito freqüente na resolução de problemas de técnicas de contagem é SABER QUANDO SOMAR OU QUANDO MULTIPLICAR as quantidades calculadas. Vamos a uma regrinha muito prática!

"Você deverá perguntar-se se as quantidades calculadas referem-se a eventos principais (EP) ou referem-se a eventos intermediários (EI). Se a resposta for EP você deverá SOMAR; se a resposta for EI você deverá MULTIPLICAR"

No exercício 2 acima, os 1º e 2º casos referem-se a EP, por isso foram somados. "VIU COMO É FÁCIL"

PROBABILIDADE

03) **(ESAF)** Um dado de seis faces numeradas de 1 a 6 é viciado de modo que, quando lançado, a probabilidade de ocorrer uma face par qualquer é 300% maior do que a probabilidade de ocorrer uma face ímpar qualquer. Em dois lançamentos desse dado, a probabilidade de que ocorram exatamente uma face par e uma face ímpar (não necessariamente nesta ordem) é igual a:

a) 0,1600 b) 0,1875 c) 0,3200 d) 0,3750 e) 1

Comentário:
Vamos lá meus amigos!
Observe que se trata de um dado "viciado", isto é, a probabilidade do resultado do lançamento ser par é maior que a probabilidade do resultado do lançamento ser ímpar. Calculemos estas probabilidades:

Sejam, P(ímpar) = x e P(par) = x + 300%x = x + 3x = 4x;
Como P(ímpar) + P(par) = 1 (100%), tem-se que x + 4x = 1, ou seja, 5x = 1; x = 0,2;
Daí, P(ímpar) = 0,2 e P(par) = 0,8.

Nos dois lançamentos poderemos ter:

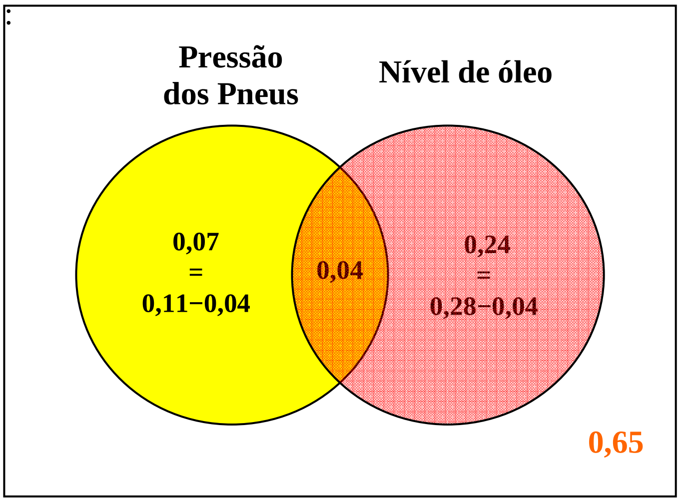
1º Lançamento	2º Lançamento	
par	ímpar	= 0,8 x 0,2 = 0,16
ímpar	par	= 0,2 x 0,8 = 0,16

Como se tratam de eventos principais (EP) somamos, logo P = 0,16 + 0,16 = 0,32.
Resposta certa letra (C)

04) **(MPU – Técnico Controle Interno – ESAF – 2004)** Quando Lígia pára em um posto de gasolina, a probabilidade de ela pedir para verificar o nível de óleo é 0,28; a probabilidade de ela pedir para verificar a pressão dos pneus é 0,11 e a probabilidade de ela pedir para verificar ambos, óleo e pneus, é 0,04. Portanto, a probabilidade de Lígia parar em um posto de gasolina e não pedir nem para verificar o nível de óleo e nem para verificar a pressão dos pneus é igual a

a) 0,25. b) 0,35. c) 0,45. d) 0,15. e) 0,65.

Comentário:
Meus queridos!
Visualizando este problema através de diagramas, facilmente concluímos que



Não é mais fácil?!!

Para quem gosta de fórmula aí vai:
Legenda : Pressão dos pneus : pp
Nível de óleo: no
Sabe-se que : $P(no \cup pp) = P(no) + P(pp) - P(no \cap pp)$
A probabilidade pedida será dada por:
$P = 1 - P(no \cup pp) = 1 - P(no) - P(pp) + P(no \cap pp) = 1 - 0,28 - 0,11 + 0,04 = 1 - 0,39 + 0,04 = 1 - 0,35 = 0,65$
Portanto, resposta certa letra (E).

ÁLGEBRA LINEAR

MATRIZES E DETERMINANTES

05) (STN/AFC – ESAF – 2005) Considere duas matrizes quadradas de terceira ordem, **A** e **B**. A primeira, a segunda e a terceira colunas da matriz **B** são iguais, respectivamente, à terceira, à segunda e à primeira colunas da matriz **A**. Sabendo-se que o determinante de **A** é igual a x^3, então o produto entre os determinantes das matrizes **A** e **B** é igual a:
a) $-x^{-6}$ b) $-x^6$ c) x^3 d) -1 e) 1

Comentário:
Prezados concurseiros! Eis alguns resultados que serão utilizados no comentário:

"quando fazemos um nº ímpar de trocas de filas paralelas em uma matriz para gerar outra, o determinante da nova matriz será SEMPRE igual ao determinante da anterior multiplicado por (−1)"

"para quaisquer duas matrizes quadradas de mesma ordem, o determinante do produto das matrizes será SEMPRE igual ao produto dos determinantes de cada matriz separadamente"

Observe que pelo enunciado temos:

$A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}; B = \begin{bmatrix} c & b & a \\ f & e & d \\ i & h & g \end{bmatrix}$**. Nota-se que obtemos a matriz B trocando-se a 1º coluna com a 3ª coluna, isto é, realizamos uma troca. Daí,** $\det B = (-1)\, x \det A$**. Como** $\det A = x^3 \Rightarrow \det B = -x^3$.

Portanto, teremos $\det AxB = \det A \, x \det B = x^3 . (-x^3) = -x^6$ **.**
Resposta certa letra (B)

06) (MPOG – ESAF - 2005) O menor complementar de um elemento genérico x_{ij} de uma matriz X é o determinante que se obtém suprimindo a linha e a coluna em que esse elemento se localiza. Uma matriz Y = y_{ij}, de terceira ordem, é a matriz resultante da soma das matrizes A = (a_{ij}) e B = (b_{ij}). Sabendo-se que $(a_{ij}) = (i+j)^2$ e que $b_{ij} = i^2$, então o menor complementar do elemento y_{23} é igual a:
a) 0
b) -8
c) -80
d) 8
e) 80

Comentário:
Vamos lá meus amigos!
Sabe-se que: "o determinante de uma matriz de segunda ordem (2x2) será SEMPRE dado pelo produto dos elementos da diagonal principal (i = j) menos o produto dos elementos da diagonal secundária". Vejamos um exemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{produto dos elementos da diag. principal} = 1 x 4 = 4;$$

$$\text{produto dos elementos da diag. secundária} = 3 \text{ x } 2 = 6. \text{ Logo, detA} = 4 - 6 = -2$$

Como queremos determinar o menor complementar do elemento y_{23}, pela definição do enunciado, eliminaremos a linha 2 e a coluna 3, restando apenas as linhas 1 e 3, bem como, as colunas 1 e 2 da matriz Y.

Se não vejamos!

$$Y = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} \\ y_{21} & y_{22} & y_{23} \\ y_{31} & y_{32} & y_{33} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \\ 16 & 25 & 36 \end{bmatrix}}_{A} + \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 4 \\ 9 & 9 & 9 \end{bmatrix}}_{B} = \begin{bmatrix} 5 & 10 & 17 \\ 13 & 20 & 29 \\ 25 & 34 & 45 \end{bmatrix}$$ **. Eliminando a linha 2 e a coluna 3,**

temos: $X = \begin{bmatrix} 5 & 10 \\ 25 & 34 \end{bmatrix} \Rightarrow \det X = (5x34) - (25x10) = 170 - 250 = -80$ **.**
Resposta certa letra (C)

07) (MPU - Técnico Administrativo – ESAF - 2004) Um sistema de equações lineares é chamado "possível" ou "compatível" quando admite pelo menos uma solução; é chamado de "determinado" quando a solução for única, e é chamado de "indeterminado" quando houver infinitas soluções.

$$\begin{cases} ma + 3mb = 0 \\ 2a + mb = 4 \end{cases}$$

Assim, sobre o sistema formado pelas equações em que a e b são as incógnitas, é correto afirmar que
a) se m≠0 e a=2, qualquer valor de b satisfaz o sistema.
b) se m=0, o sistema é impossível.
c) se m=6, o sistema é indeterminado.
d) se m≠0 e a≠2, qualquer valor de b satisfaz o sistema.
e) se m≠0 e m≠6, o sistema é possível e determinado.

Comentário:
Prezados concurseiros!
Para resolvermos esta questão sem perder muito tempo, é imprescindível saber que:

Dado o sistema linear: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Se: $$\begin{cases} \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2} \Rightarrow \text{O sistema será possível e determinado(SPD)} \Rightarrow \text{ uma única solução} \\ \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2} \Rightarrow \text{ O sistema será impossível (SImp)} \Rightarrow \text{nenhuma solução} \\ \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \Rightarrow \text{ O sistema será possível e indeterminado (SPInd)} \Rightarrow \text{infinitas soluções} \end{cases}$$

Apliquemos esta idéia à questão. Note que para o sistema ser possível e determinado (SPD), deveremos ter: $\frac{m}{2} \neq \frac{3m}{m} \Rightarrow \frac{m}{2} \neq \frac{3}{1} \Rightarrow m \neq 6$ **. Como** $m \neq 0$**, a resposta correta é LETRA (E).**

LÓGICA MATEMÁTICA

VERDADES E MENTIRAS

08) (MPU – ESAF – 2004) Uma empresa produz andróides de dois tipos: os de tipo V, que sempre dizem a verdade, e os de tipo M, que sempre mentem. Dr. Turing, um especialista em Inteligência Artificial, está examinando um grupo de cinco andróides – rotulados de Alfa, Beta, Gama, Delta e Épsilon –, fabricados por essa empresa, para determinar quantos entre os cinco são do tipo V. Ele pergunta a Alfa: “Você é do tipo M?” Alfa responde, mas Dr. Turing, distraído, não ouve a resposta. Os andróides restantes fazem, então, as seguintes declarações:

Beta: “Alfa respondeu que sim”.
Gama: “Beta está mentindo”.
Delta: “Gama está mentindo”.
Épsilon: “Alfa é do tipo M”.

Mesmo sem ter prestado atenção à resposta de Alfa, Dr. Turing pôde, então, concluir corretamente que o número de andróides do tipo V, naquele grupo, era igual a

a) 1. b)2 c) 3. d)4 e) 5.

Comentário:
Independentemente se Alfa é do tipo V ou do tipo F, vejamos qual seria sua a resposta à pergunta de Dr. Turing.
Se Alfa é do tipo V (sempre diz a verdade) ⇒ responderia que Não
Se Alfa é do tipo F (sempre mente) ⇒ responderia que Não

Supondo que Alfa seja do tipo V, pelas declarações dos outros temos que:
Beta mente ⇒ tipo F;
Gama fala a verdade ⇒ tipo V;
Delta mente ⇒ tipo F;
Épsilon mente ⇒ tipo F.

Supondo que Alfa seja do tipo F, pelas declarações dos outros temos que:
Beta mente ⇒ tipo F;
Gama fala a verdade ⇒ tipo V;
Delta mente ⇒ tipo F;
Épsilon fala verdade ⇒ tipo V.

Logo, considerando as duas suposições, concluímos que temos dois andróides do tipo V.
Resposta correta letra (B).

ESTRUTURAS LÓGICAS

09) (AFC – ESAF – 2002) Se Iara não fala italiano, então Ana fala alemão. Se Iara fala italiano, então ou Ching fala chinês ou Débora fala dinamarquês. Se Débora fala dinamarquês, Elton fala espanhol. Mas Elton fala espanhol se e somente se não for verdade que Francisco não fala francês. Ora, Francisco não fala francês e Ching não fala chinês. Logo,

a) Iara não fala italiano e Débora não fala dinamarquês.
b) Ching não fala chinês e Débora fala dinamarquês.
c) Francisco não fala francês e Elton fala espanhol.
d) Ana não fala alemão ou Iara fala italiano.
e) Ana fala alemão e Débora fala dinamarquês.

Comentário:
Temos as seguintes proposições:
P1: Se Iara não fala italiano, então Ana fala alemão.
P2: Se Iara fala italiano, então ou Ching fala chinês ou Débora fala dinamarquês.
P3: Se Débora fala dinamarquês, Elton fala espanhol.
P4: Elton fala espanhol se e somente se não for verdade que Francisco não fala francês.
START: Francisco não fala francês e Ching não fala chinês.

Numa questão como essa em que nos são fornecidas várias proposições afim de que possamos tirar conclusões a respeito, devemos SUPOR SEMPRE TODAS AS PROPOSIÇÕES VERDADEIRAS, e a partir de equivalências lógicas tirarmos nossas conclusões. Se não vejamos:

START: Francisco não fala francês (não vale a ida da bicondicional em P4) $\overset{P4}{\Rightarrow}$ Elton não fala espanhol (negação da tese de P3) $\overset{P3}{\Rightarrow}$ Débora não fala dinamarquês (contrapositiva de P3) e Ching não fala chinês (negação da tese de P2) $\overset{P2}{\Rightarrow}$ Iara não fala italiano (contrapositiva de P2) $\overset{P1}{\Rightarrow}$ Ana fala alemão.

Logo as conclusões são: Francisco não fala francês - Elton não fala espanhol - Débora não fala dinamarquês - Ching não fala chinês - Iara não fala italiano - Ana fala alemão.

Resposta certa letra (A).

EQUIVALÊNCIAS LÓGICAS

10) **(ANEEL – Técnico Administrativo – ESAF – 2006)** Se Elaine não ensaia, Elisa não estuda. Logo,
a) Elaine ensaiar é condição necessária para Elisa não estudar.
b) Elaine ensaiar é condição suficiente para Elisa estudar.
c) Elaine não ensaiar é condição necessária para Elisa não estudar.
d) Elaine não ensaiar é condição suficiente para Elisa estudar.
e) Elaine ensaiar é condição necessária para Elisa estudar.

Comentário:
Vamos em frente meus amigos!
TODA proposição condicional admite uma análise sob o enfoque de CONDIÇÃO NECESSÁRIA E CONDIÇÃO SUFICIENTE, isto é, dada uma condicional "p(Hipótese) ⇒ q (Tese)" tem-se:

"H SEMPRE será CONDIÇÃO SUFICIENTE para T"

Interpretação: H ocorre ⇒ T ocorre
H não ocorre ⇒ T poderá ocorrer ou não (nada se pode afirmar)

"T SEMPRE será CONDIÇÃO NECESSÁRIA para H"

Interpretação: T não ocorre ⇒ H não ocorre (contrapositiva)
T ocorre ⇒ H poderá ocorrer ou não (nada se pode afirmar)

Por exemplo: “Se choveu, então a rua ficou molhada”
Hipótese: Choveu;
Tese: A rua ficou molhada.
Análise:

Chover é condição suficiente para a rua ficar molhada, entretanto, não ter chovido não garante que a rua esteja seca. (De repente algum “maluco” resolve molhar a rua com uma mangueira ...)

A rua ficar molhada é condição necessária para ter chovido, porém nada garante se realmente choveu ou não (De repente foi obra do maluco acima...)

Apliquemos estas idéias no exercício acima:

“Se Elaine não ensaia, (então) Elisa não estuda”

Elaine não ensaiar é condição suficiente para Elisa não estudar.
Elisa não estudar é condição necessária para Elaine não ensaiar

Note que não existe resposta. Certamente, ela estará na contrapositiva da proposição. Vejamos!

Contrapositiva: “Se Elisa estuda, então Elaine ensaia”.
Hipótese: Elisa estuda.
Tese: Elaine ensaia.
Analisemos:

Elisa estudar é condição suficiente para Elaine ensaiar.
Elaine ensaiar é condição necessária para Elisa estudar.

Logo, resposta correta letra (E). Viu com foi fácil?!!!

Meus queridos amigos, espero que com essa pequena contribuição, possa ter esclarecido um pouco mais os conteúdos que serão cobrados pela ESAF neste próximo concurso!
Um forte abraço a todos,
Vamos estudar!!!!
Fiquem todos com DEUS!
Prof Pio.